

Interdépendances entre les Prix du Pétrole Brut et les Marchés Boursiers.

Kamel Malik Bensafta

Maître de Conférence HDR à l'Université de Chlef (Algérie).

Chercheur Associé au LEO (Laboratoire d'Economie d'Orléans, France).

Phone: +213553218129

Email : bensafta.malik@yahoo.fr

Gervasio Semedo

Maître de Conférence HDR à l'Université François Rabelais de Tours (France).

Chercheur Associé au LEO (Laboratoire d'Economie d'Orléans, France).

Email : gsemedo2002@yahoo.fr

Interdépendances entre les Prix du Pétrole Brut et les Marchés Boursiers.

RESUME : ce papier traite la question de transmission des prix et des incertitudes de prix du pétrole brut et les marchés boursiers. L'application d'une modélisation GARCH multivariée a montré que les chocs de prix du pétrole et les incertitudes sur ce marché sont transmises vers les marchés américains et européens. Il apparait également l'effet global du marché américain. Nos résultats montrent l'importance de la part asymétrique de la transmission des chocs de volatilité.

JEL Classification : Q4, G15, C32.

Mots clés : marché de l'énergie, volatilité, VAR, MGARCH

Interdependence among Crude Oil Prices and Stock Markets.

ABSTRACT: in this paper we study prices and uncertainty transmission between crude oil prices and stocks markets. An MGARCH model shows that oil shocks and uncertainty spillover to US market and aggregate European market. Our results indicate an important asymmetric transmission of volatility between markets.

Key Words: Energy products, Volatility, MGARCH, VAR, Variance Regime.

1. INTRODUCTION

Le pétrole brut est la source d'énergie la plus utilisée dans le monde. Cette utilisation en fait un bien d'ordre stratégique pour les Etats et pour les entreprises de production. La hausse du prix du pétrole depuis le début des années 2000 rend obligatoire la couverture contre les risques sur les marchés des produits pétroliers. Les stratégies de couverture reposent sur la bonne estimation de la volatilité des prix. De ce fait, une modélisation adéquate de la volatilité des prix du pétrole et des prix du gaz naturelle est nécessaire. Les processus de type GARCH univarié permettent une estimation acceptable de la volatilité des prix car ils décrivent fidèlement les caractéristiques de regroupement de la volatilité et d'asymétrie (ENGEL, 1982, BOLLERSLEV, 1986). Les travaux empiriques des processus de type GARCH confirment le caractère hétéroscédastique de la volatilité des produits pétroliers et des indices boursiers¹. Cependant, les modèles de type GARCH univariés souffrent de deux handicaps : un biais lié aux variables omises et un biais de surestimation de la persistance des chocs de volatilité (LAMOUREUX ET LASTRAPES, 1990). L'extension à la classe des processus GARCH multivariés donne une première réponse au problème de biais de variables omises en permettant la mesure des transmissions entre les prix et les volatilités des différents marchés.

Les prix des produits pétroliers et les indices boursiers ont ces caractéristiques et de fait, les modèles de type GARCH sont de plus en plus utilisés dans l'estimation de la volatilité de ces prix (GOODHART, 1988, KING ET WADHWANI, 1990, KING ET AL, 1994, KANG ET AL, 2009, NARAYAN ET NARAYAN, 2007, ELDER ET SERLETIS, 2009, MOHAMMADI ET SU, 2010, WEI ET AL, 2010). Il existe une littérature empirique importante traitant la modélisation GARCH de la volatilité des produits pétrolier². Concernant l'impact en moyenne, les études de JONES ET KAUL (1996) ET SADORSKY (1999) trouvent une relation négative entre les prix du pétrole et les indices boursiers. Ces résultats sont confirmés par les travaux de PARK ET RATTI (2008), MILLER ET RATTI (2009), CHEN (2009), FILIS (2010), AROURI (2011) ET AROURI ET NGUYEN (2010). Par ailleurs, cet impact des marchés pétroliers sur les marchés boursiers ne fait pas l'unanimité, car d'autres études ne trouvent pas de relations significatives (JAMMAZI ET ALOUI, 2010; CONG *ET AL.*, 2008; HAUNG *ET AL.*, 1996).

La volatilité observée sur les marchés boursiers est simultanément observée sur les marchés de matières premières comme le marché du pétrole. L'incertitude sur les marchés de produits pétroliers est expliquée par des facteurs endogènes comme les capacités de production, les stocks et les équilibres offre-demande. L'incertitude est également expliquée par des facteurs exogènes tels que l'incertitude sur les marchés boursiers et spécialement, le marché américain et les marchés européens. De nombreuses études empiriques ont établis la transmission entre les prix des produits pétroliers et les marchés boursiers (BAILLIE ET MEYERS, 1991, SADORSKY, 1999, BOREINSTEIN ET AL, 1997, FAN ET AL, 2008). Ces études souffrent d'un biais de surestimation de la persistance des chocs car elles ne prennent pas en compte les changements de régime de la variance (LAMOUREUX ET LASTRAPE, 1990)³. Ewing et Malik (2002) utilisent un modèle BEKK-GARCH avec des changements de régimes dans la variance pour l'analyse de la transmission en moyenne et en variance entre les prix du pétrole et le marché américain. Ce travail se limite à une modélisation bivarié. D'autres travaux empiriques utilisent la modélisation multivariée pour des analyses de couverture dynamique et l'étude des corrélations conditionnelles (CHANG ET AL, 2009, CHANG ET AL, 2010, LANZA ET AL, 2010, CHANG ET AL, 2011, SADORSKY, 2012). Ces travaux se limitent également à des modèles bivariés.

¹ Voir Wang et Wu (2012) pour une revue de littérature sur l'application des modèles GARCH univarié et multivarié dans la modélisation de la volatilité des prix du pétrole

² Voir par exemple Giot et Laurent, 2003, Aloui et Mabrouk, 2010, Adrangi et al., 2001; Kang et al., 2009;; Mohammadi and Su, 2010; Morana, 2001; Narayan and Narayan, 2007; Sadorsky, 2006).

³ Ce biais est notamment responsable de la surévaluation des corrélations conditionnelles entre les marchés. A cause de ce biais, ces modèles standards sous-estiment la part exogène de la volatilité. Les processus GARCH multivariés comme le BEKK-GARCH et le VECH répondent à ce dernier objectif, mais souffrent tout de même du biais de surestimation de la persistance.

Dans cette étude nous nous intéressons à la transmission des prix et des incertitudes entre les marchés de pétrole NYMEX et IPE et les marchés boursiers. Notre analyse de la transmission porte sur quatre indices : l'indice du prix du pétrole WTI, l'indice du prix du pétrole Brent, l'indice du marché américain et l'indice agrégé des marchés européens. Nous comparons les estimations de transmission obtenues à partir de quatre modélisations : le modèle VAR linéaire, le modèle BEKK de ENGLE ET KRONER (1995), le modèle BEKK avec bris structurel en variance de BENSAPTA ET SEMEDO (2009, 2011) noté BEKK-BSV⁴ et une nouvelle spécification GARCH quadrivarié avec des changements de régime dans la variance et des transmissions asymétrique des chocs de volatilité noté BEKK-TAV-BSV. Dans ce nouveau modèle, nous faisons une distinction dans la transmission de la volatilité entre les marchés entre chocs positifs et chocs négatifs. Il est admis que les marchés sont plus volatiles suite aux mauvaises nouvelles qu'en réaction aux bonnes nouvelles. Aussi, il est plausible que cette asymétrie se retrouve dans la transmission de l'incertitude entre les marchés. Intuitivement, l'introduction des régimes de variance améliore le modèle BEKK standard. La présence transmission asymétrique de la volatilité améliore les estimations des transmissions en variance. La suite du document est organisée comme suit : description du modèle économétrique dans la section 2, présentation des résultats dans la section trois et une dernière section pour les conclusions.

2. Le modèle économétrique

BENSAPTA ET SEMEDO (2009, 2011) utilisent un modèle GARCH pour l'analyse de la volatilité des marchés boursiers en présence de ruptures structurelles en variance. Ces derniers introduisent des ruptures en variance pour analyser la transmission en variance et la contagion en période de crises. L'analyse des transmissions en variance montre que l'introduction des ruptures structurelles en variance améliore les estimations des transmissions de l'incertitude entre les marchés boursiers⁵. Dans cette étude, nous retenons un modèle GARCH quadrivarié avec des ruptures structurelles en variance augmenté d'une transmission asymétrique de la volatilité⁶.

a. Moyenne conditionnelle

Dans le cadre multivarié de cette analyse, la transmission en moyenne est mesurée par les coefficients des équations VAR de la moyenne conditionnelle. Soient r_t le vecteur des rendements logarithmiques des prix des marchés⁷ et u_t le vecteur des résidus du modèle dynamique VAR (n_1)⁸. L'écriture du VAR (n_1) est la suivante :

$$\Phi(L)(r_t - \mu) = C(L)g(X_t) + u_t \quad (1)$$

Où $\Phi(L)$ est la fonction retard du processus VAR⁹. La transmission des rendements entre les marchés est décrite par les coefficients Φ_{ij}^k du processus VAR. Ces transmissions en moyenne indiquent des

⁴ Les changements de régime en variance ou ruptures structurelles en variance sont détectés par l'algorithme itératif ICSS⁴ de Inclan et Tiao (1994) et Sansó et al (2004). Dans le modèle Bensafta et Semedo (2009), l'utilisation d'une spécification trivariée confirme le caractère global du marché américain. L'introduction des régimes de variance corrige le biais de la surestimation de la persistante des chocs de volatilité.

⁵ L'étude porte sur la crise asiatique de 1997, la crise technologique de 2000 et la crise terroriste de 2001. L'étude de la contagion montre que les crises ne sont pas systématiquement contagieuses. Ils rejoignent ainsi les résultats de Forbes et Rigobon (2002) et la théorie non-contingente des crises.

⁶ il s'agit du modèle BEKK-BSV augmenté avec une transmission asymétrique des chocs de volatilité. Il est possible d'utiliser une spécification MGARCH avec prime de risque, toutefois, ceci ne fait pas l'objet du papier. Pour des études sur la prime de risque du prix du pétrole voir par exemple Feerson et Harvey (1995).

⁷ Les rendements sont ceux des prix du pétrole et du gaz naturel ainsi que les indices du marché américain et du marché européen agrégé.

⁸ n_1 est l'ordre du processus VAR déterminé par le test LR séquentiel.

⁹ $\Phi(L) = I_m - \Phi^1 L - \dots - \Phi^{n_1} L^{n_1}$, où n_1 est l'ordre du processus VAR déterminé par le test LR séquentiel.

liens permanents ou interdépendances qui sont le résultat combiné de différents canaux¹⁰. Les équations de la moyenne conditionnelle sont augmentées d'un régresseur exogène $\mathcal{G}(X_t)$ pour saisir les effets liés aux jours fériés (fermeture de marché) et les effets liés aux jours de la semaine¹¹.

b. Variance Conditionnelle et Causalité en variance

Les résidus u_t sont de moyenne nulle, non auto-corrélés au premier degré tel que :

$$u_t = H_t^{-1/2} \varepsilon_t \quad (2)$$

Où ε_t est un vecteur N-dimension d'éléments bruit blanc tel que $\varepsilon_t \sim \text{i.i.d } \mathcal{N}(0, I_t)$ et H_t la matrice des variances-covariances conditionnelles de u_t . H_t est symétrique et définie-positive. Évidemment, les u_t ont une distribution conditionnelle $D(\dots)$, étant donné Ψ_{t-1} l'ensemble informationnel à l'instant t-1, la distribution conditionnelle est $u_t / \Psi_{t-1} \sim D(0, H_t)$, où H_t est un processus MGARCH¹². Pour la classe des modèles de variances-covariances conditionnelles BEKK, H_t est définie comme suit :

$$H_t = C'C + \sum_{i=1}^p A_i' u_{t-i} u_{t-i}' A_i + \sum_{i=1}^q B_i' H_{t-i} B_i + \sum_{i=1}^p G_i' u_{t-i} u_{t-i}' * D_{Nt-i} D_{Nt-i}' G_i \quad (3)$$

C, A_i, B_i et G_i sont des matrices de coefficients des équations des variances et covariances conditionnelles. D_{M_t-i} est un vecteur de dimension M formé de variables indicatrices (d_{it}) ¹³. Le modèle augmenté des transmissions asymétriques des chocs de volatilité et des ruptures structurelles est quant à lui défini par l'équation suivante :

$$H_t = \underbrace{C_B' C_B + \sum_{i=1}^p A_i' u_{t-i} u_{t-i}' A_i + \sum_{i=1}^q B_i' H_{t-i} B_i + \sum_{i=1}^p G_i' u_{t-i} u_{t-i}' * D_{M_t-i} D_{M_t-i}' G_i}_{\text{Standard BEKK - diagonal asymmetric}} + \underbrace{\sum_{i=1}^p \mathbb{T}_i' u_{t-i} u_{t-i}' \mathbb{T}_i + \sum_{i=1}^q \mathbb{Z}_i' H_{t-i} \mathbb{Z}_i}_{\text{transmission de volatilité}} + \underbrace{\sum_{i=1}^5 (\delta_i)^{tr} D_i \delta_i}_{\text{Effets jours de la semaine}} + \underbrace{\sum_{i=1}^p \mathbb{T} A_i' u_{t-i} u_{t-i}' * D_{M_t-i} D_{M_t-i}' \mathbb{T} A_i}_{\text{transmission asymétrique de volatilité}} \quad (4)$$

$\mathbb{T}_i, \mathbb{T} A_i$ et \mathbb{Z}_i sont des matrices coefficients de transmission des chocs de volatilité, des chocs de volatilité asymétriques et des volatilité d'ordre p et q¹⁴. Dans cette spécification, nous introduisons les ruptures structurelles en variance dans la matrice $(C_B)^{tr} (C_B)$. Ces régimes de variance sont détectés

¹⁰ Parmi ces canaux, il y a le comportement des investisseurs internationaux vis-à-vis des fondamentaux économiques d'un pays ou d'un groupe de pays (Kodres et PRITSKER, 2002) ; l'effet de richesse et le canal de liquidité (Dornbusch et al. 2000).

¹¹ $\varphi(X) = \sum_{i=1}^5 (\delta_i)^{tr} D_i$ tel que est un vecteur de variable indicatrices des jours fériés et des jours de la semaine et le vecteur des coefficients à estimer (voir l'annexe 2 pour les détails).

¹² Il existe différentes spécifications de la matrice H_t parmi lesquelles le processus BEKK Diagonal d'ENGLER ET KRONER (1995) et Les processus à Corrélation Conditionnelle Dynamique d'ENGLER (2002). BAUWENS ET AL. (2006) donnent une revue de littérature extensive des modèles MGARCH

¹³ $(d_{it}) = 1$ lorsque $u_{it} < 0$ et $(d_{it}) = 0$ sinon, M est le nombre de marchés, q et p sont les ordres du processus de type GARCH et * le produit élément par élément.

¹⁴ Voir en annexe I les détails sur la construction des matrices de transmission.

par l'algorithme ICSS hétéroscedastique¹⁵ (Voir les détails en annexe I). L'introduction de ces ruptures nous permet une réduction de la persistance des chocs de volatilité dans un cadre multivarié. Cette correction dans l'estimation de la persistance donne une mesure plus adéquate de la transmission des chocs de volatilité entre les marchés. Cette transmission en variance qui permet d'estimer la *Causalité en Variance* du marchés (1) vers le marché (2) est mesurée par la somme $\sum_{i=1}^p (tcv_{2,i}^1)^2 + \sum_{i=1}^q (tv_{2,i}^1)^2$. Lorsque le choc est négatif, la transmission en variance est mesurée par la somme $\sum_{i=1}^p (tcv_{2,i}^1)^2 + \sum_{i=1}^q (tv_{2,i}^1)^2 + \sum_{i=1}^p (tcva_{2,i}^1)^2$. Cette grandeur représente également la mesure de persistance de la volatilité transmise¹⁶. Puisque l'analyse porte sur des données de fréquence journalière, la matrice Ht contient un régresseur supplémentaire pour tenir comptes des effets liés aux jours de la semaine « *Day of the week effects* », de l'effet week-end « *Weekend effects* » et des effets de jours fériés « *Holliday day effects* »¹⁷ (annexe II).

c. Tests de transmission en moyenne et en variance

Pour tester la causalité entre les marchés aussi bien en moyenne qu'en variance, nous faisons appel au test de Causalité au sens de Granger :

- La transmission en moyenne du marché (1) vers le marché (2) est mesurée par les coefficients Φ_{12}^k du modèle VAR (k allant de 1 à n_1). Le test de transmission en moyenne revient à tester l'hypothèse de nullité des coefficients Φ_{12}^k . Le test de transmission en moyenne et en fait un test de Non-Causalité au sens de Granger¹⁸ : hypothèse nulle d'absence de causalité en moyenne ACM notée $H_{0,1 \rightarrow 2}^{ACM}$.
- La transmission en variance est liée aux coefficients (tcv_{12}) , $(tacv_{12})$ et $(tv_{\cdot 12})$. Il y a causalité en variance du marché (1) vers le marché (2) lorsque les coefficients (tcv_{12}) , $(tacv_{12})$ et $(tv_{\cdot 12})$ sont significativement non-nuls¹⁹. Le test de transmission en variance est en fait un test de Wald de *Non-Causalité en variance*²⁰ : hypothèse nulle d'absence de transmission en variance ACV notée $H_{0,1 \rightarrow 2}^{ACV}$.

d. Méthode d'estimation

Le modèles BEKK standard, le modèle *BEKK-BSV* et le modèle *BEKK-BSV* asymétrique sont estimés en seules étape²¹. En considérant les vecteurs des erreurs u_t suivant conditionnellement une loi normale multi-variée, la fonction de densité jointe est le produit de toutes les densités conditionnelles normales. En outre, la fonction de vraisemblance de la distribution jointe est la somme des log-vraisemblance de ces distributions. Soit f_t la distribution conditionnelle jointe et L_{N_b} sa fonction de log-vraisemblance :

$$\log(L_{N_b}) = \sum_{t=1}^{N_b} \log(f(r_t/\Omega_{t-1}; \vartheta)) \quad (5)$$

¹⁵ Pour les détails sur la détection des changements de régime en variance par l'algorithme ICSS, voir INCLAN ET TIAO (1994), SANZO ET AL, (2004), MALIK (2003) ET BENSALTA (2010).

¹⁶ l'indice i indique l'ordre de retard dans la transmission.

¹⁷ Des effets significatifs sont trouvés dans le cas du marché américain par SOLNIK ET BOUSQUET (1990). Ces effets sont également retrouvés dans les marchés européens (CHANG ET AL, 1993).

¹⁸ Le Test d'absence de transmission en moyenne est noté NTM (voir les détails du test en annexe III).

¹⁹ i est l'ordre du processus de transmission de (1) vers (2).

²⁰ Le test d'absence de transmission en variance est noté NTV (voir les détails du test en Annexe III).

²¹ L'estimation en deux étapes ne peut pas être effectuée si nous cherchons à estimer une prime de risque en introduisant la variance comme régresseur supplémentaire dans les équations de la moyenne conditionnelle.

$$\log(f_t(r_t/\Omega_{t-1}; \vartheta)) = -2\log 2\pi - \frac{1}{2} \log(\text{Det}(H_{t,\vartheta})) - \frac{(u_t)^{tr}(H_{t,\vartheta})^{-1}u_t}{2}$$

$$\log(L_{N_b}) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{N_b} \left[4 \log(2\pi) + \log(\text{Det}(H_{t,\vartheta})) + (u_t)^{tr}(H_{t,\vartheta})^{-1}u_t \right]$$

Où N_b le nombre d'observations dans l'échantillon.

Le vecteur $\theta = \text{vech}(A_i, B_i, C_B, G_i, T_i, Z_i, TA_i, \delta)$ est le vecteur des paramètres inconnus à estimer²² et u_t le vecteur des innovations normalement distribuées. Les produits $u_{it}u_{jt}$ ne sont pas indépendants (dépendance du second ordre) et la distribution jointe des $u_{1t}; u_{2t}; u_{3t}; u_{4t}$ pourrait ne pas être une loi normale multi-variée. Pour cette raison, le vecteur paramètre θ est estimé par la méthode du Quasi-Maximum de vraisemblance (*QML*) de BOLLERSLEV ET WOOLDRIDGE (1992). L'optimisation est obtenue par l'algorithme *BHHH* (BERNDT ET ALII. 1974) adapté aux maximisations non linéaires (ENGLE ET KRONER, 1995). Nous présentons dans ce qui suit, les principaux résultats.

3. DONNES ET RESULTATS

Les données représentent quatre indices : indice des prix du pétrole brute (WTI), indice des prix du pétrole (Brent), l'indice MSCI du marché américain (MSCI-USA) et l'indice MSCI des marchés européens agrégés (MSCI-EU). Le tableau 1 présente les statistiques descriptives des quatre séries de rendements²³. La fréquence des données est journalière et couvre la période de Juin 2007 à Octobre 2013, soit un total de 1305 observations. Les quatre séries d'indices sont intégrées d'ordre 1. Les séries de rendements logarithmiques $\Delta \log(\text{MSCI} - \text{USA}), \Delta \log(\text{MSCI} - \text{EU}), \Delta \log(\text{WTI})$ et $\Delta \log(\text{Brent})$ sont stationnaires au regard du test ADF.

Tableau 1

Les séries de rendements présentent des caractéristiques d'asymétrie et de queues larges typiques aux séries macro-financières de haute fréquence. Les prix des marchés pétroliers sont plus volatiles que les prix des marchés boursiers américain et européen. L'asymétrie des rendements est opposée dans les deux types de marchés : les prix pétroliers présentent une asymétrie vers la droite alors que les prix boursiers sont asymétriques vers la gauche. Le coefficient de Kurtosis s'éloigne largement de la valeur normale pour les quatre séries indiquant la présence de valeur extrêmes. Ces caractéristiques d'asymétrie et de queues épaisses conduisent à rejeter la normalité des données pour les quatre séries (statistiques de Jarque-Bera).

3.1. Analyse de la moyenne

Les estimations des transmissions en moyennes obtenues avec le modèle VAR linéaire et les trois modèles VAR non linéaires²⁴ sont données dans le tableau 2 et le tableau 3. Au regard du test LR, les modèles VAR non-linéaire sont préférables au modèle VAR linéaire. De ce fait, nous supposons que les estimations des transmissions en moyenne entre les marchés obtenues par les spécifications non-linéaires sont préférables car elles sont plus proches du modèle réel. Les résultats de ces estimations sont les suivants :

Premièrement, la présence de retards dans les modèles VAR indique l'existence d'un temps nécessaire pour le traitement de l'ensemble informationnel des rendements de prix. Une semaine est nécessaire aux marchés pour décrypter et intégrer l'ensemble des informations disponibles.

²² Dans le modèle Quadri-varié, le vecteur des rendements est $r_t = (r_{WTI,t} \ r_{Brent,t} \ r_{EUA,t} \ r_{Europe,t})'$. Les ordres du processus *GJR-GARCH* et les ordres des régresseurs de transmission en variance sont $p = q = 1$.

²³ Les résultats du test de stationnarité ADF montrent que les séries de prix et d'indices sont intégrées d'ordre 1 et sont de type DS. Les séries de différences premières des logarithmes (rendements logarithmiques) sont stationnaires. Les résultats du test ADF ne sont pas donnés mais ils sont disponibles auprès des auteurs.

²⁴ L'ordre du processus VAR est déterminé par le test LR séquentiel.

Deuxièmement, il existe plusieurs transmissions significatives entre les quatre marchés²⁵. La présence de causalité entre les prix de pétrole est également vérifiée avec le test de causalité au sens de Granger que nous avons appelé test ACM. Les résultats du test montrent des causalités des marchés américain et européen vers les prix du pétrole. Il y a également des causalités des prix du pétrole vers les trois marchés. La plus forte causalité est repérée du marché américain vers le marché européen. Le test ACM ne détecte aucune causalité du marché de Brent à Londres (tableau 3, panel C). L'effet des prix du pétrole WTI sur le prix Brent est important et estimé à 34%²⁶. Il y a également un effet positif des prix américain sur les prix du pétrole et sur les prix européens. 21% du prix du pétrole WTI, 21% du prix du pétrole Brent et 50% des prix européens sont liés au prix du marché américain (tableau 2, panel A). Concernant le marché européen, nous trouvons un impact négatif des prix européens sur le prix du pétrole : 15 pour cent de la baisse des prix du pétrole WTI et 17 pour cent de la baisse des prix du pétrole Brent sont liés à la hausse des prix européens. Ce résultat est similaire aux résultats obtenus précédemment par AROURI (2011) ET AROURI ET NGUYEN (2010). Nos estimations ne montrent pas des effets feed-back du marché de Brent²⁷. Les transmissions entre les marchés sont également saisies par les mesures de la transmission en moyenne de long terme TMLT²⁸. Ces mesures montrent que plus de 38% du prix du Brent est déterminé par le prix du WTI. L'impact cumulé le plus important concerne celui du marché américain sur le marché européen. Les prix de ce dernier sont à 51% définis par les prix américains. Le marché américain détermine également 24% des prix WTI et 28% des prix du Brent. L'impact cumulé du marché européen sur les prix du pétrole est négatif. A long terme, 10% de baisse des prix du WTI et 12 de baisse des prix du Brent sont liées à la hausse des prix du marché européen. Aucun effet des prix du pétrole et des prix européens n'est enregistré sur les prix américains. Ces transmissions sont illustrées par les fonctions de réponses-impulsions cumulées (FRIC)²⁹ obtenues par le modèle BEKK-TAV-BSV (figure 1).

Tableau 2 et Tableau 3

Troisièmement, nos estimations montrent que les prix américains sont totalement exogènes par rapport aux autres prix. Ce résultat est important car il permet ultérieurement d'estimer le modèle du marché américain séparément des autres marchés.

Enfin, les estimations montrent que le prix du pétrole WTI subit un effet positif lié aux jours fériés et à l'ouverture du marché le lundi. Ces effets ne sont pas enregistrés sur le marché de pétrole de Londres et ne sont pas non plus détectés sur les marchés boursiers américains et européens (tableau 2, panel B).

²⁵ Les quatre spécifications VAR fournissent des estimations de coefficients différents mais proches. Le texte donne la lecture des transmissions issues du modèle BEKK-TAV-BSV. Les estimations complètes sont disponibles auprès de l'auteur.

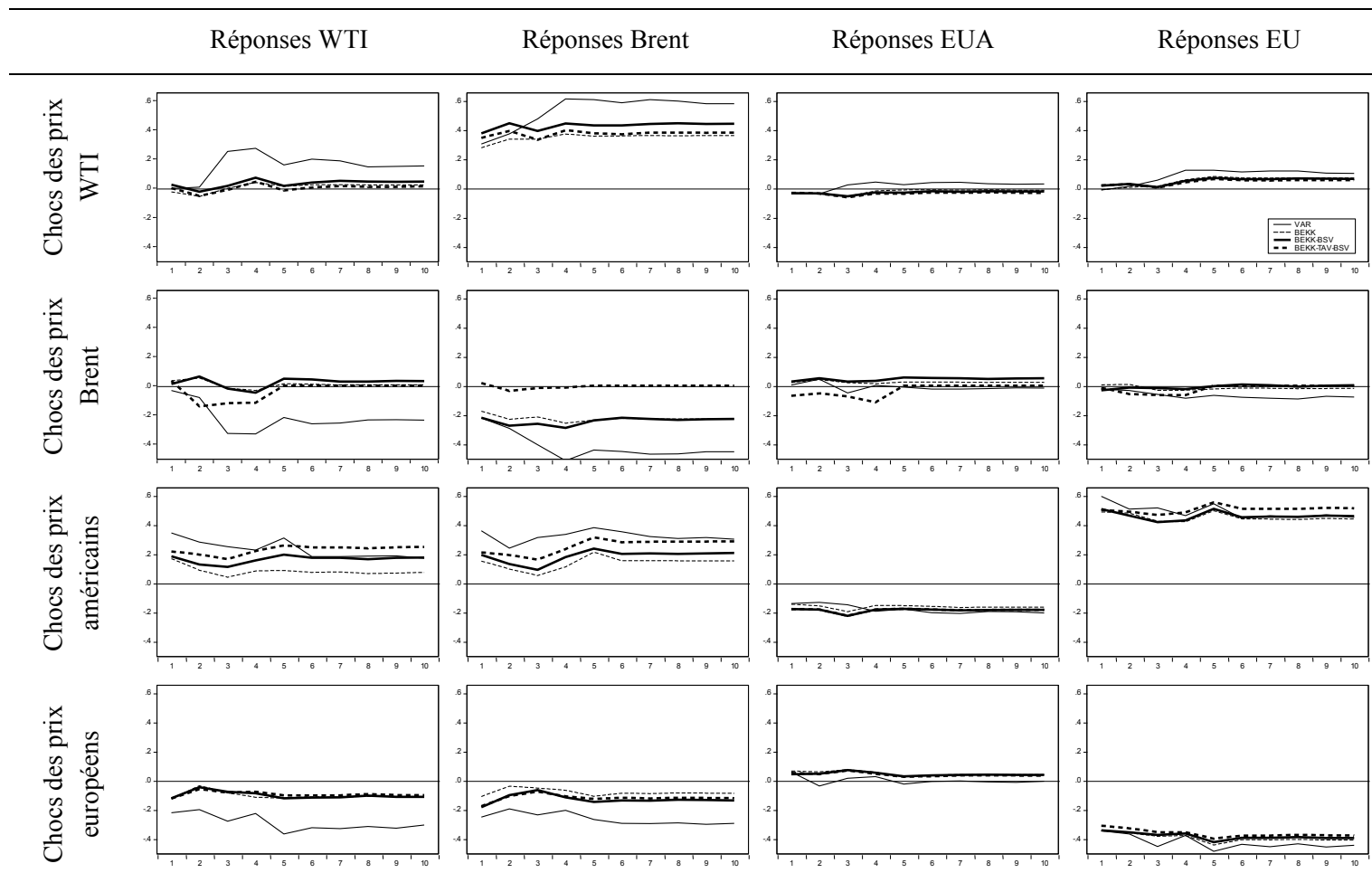
²⁶ Hamilton (2009) et Kilian (2007), montrent que l'impact des chocs de prix du pétrole sur les prix boursiers est différents selon que l'origine des chocs soit du type « demand-side » ou du type supply-side ».

²⁷ Ce résultat est également trouvé dans Pyndick (2004).

²⁸ Transmission en Moyenne de Long-Terme TMLT est mesurée par $\Phi = (I_5 - \sum_{i=1}^5 \Phi^i)^{-1}$ (Voir Luthekpól, 2001).

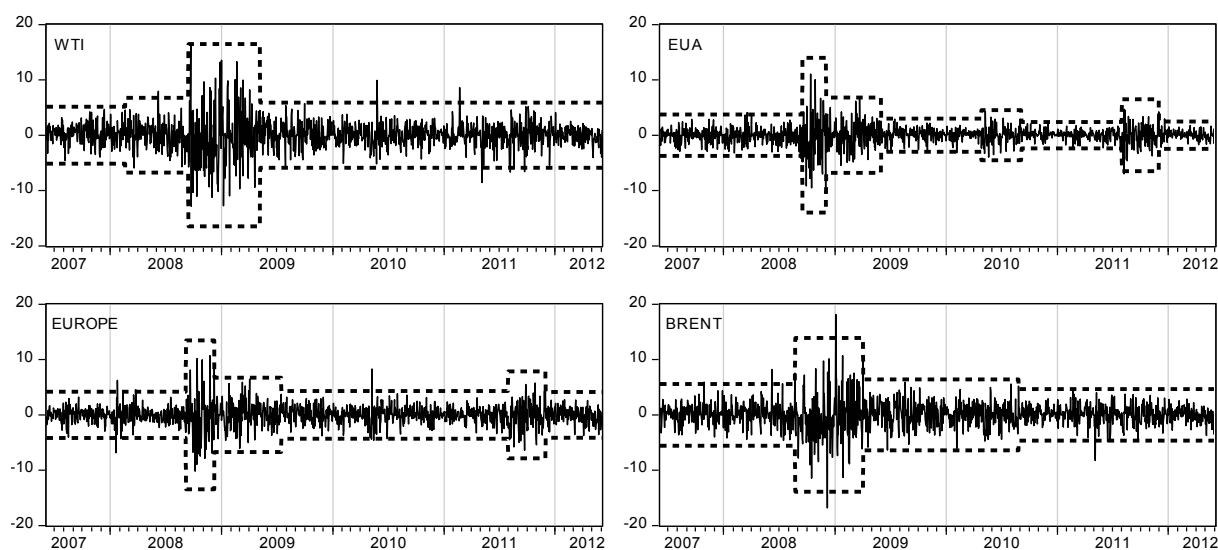
²⁹ Les FRIC mesurent les réponses cumulées à 10 jours suite à un choc unitaire.

Figure 1. Fonction des Réponses-Impulsion Cumulées.



Les FRIC sont mesurées sur 10 jours suite à un choc initial unitaire.

Figure 1 : Régimes de Variance



Les régimes de variances sont obtenus par l'application de l'algorithme ICSS-H.

3.2. Analyse de la volatilité

L'analyse de la variance conditionnelle par le biais des modèles BEKK standard, le modèle BEKK-BSV et le modèle BEKK-TAV-BSV permet la lecture de quatre aspects de la dynamique de la volatilité des prix : les régimes de volatilité, la persistance de la volatilité, la transmission de la volatilité et la transmission asymétrique de la volatilité.

a. Régimes de volatilité

Nous avons appliqué l'algorithme ICSS-H aux séries de rendement des prix du pétrole, des prix du gaz, des indices MSCI américains et européens agrégé sur la période de Juin 2002 à Octobre 2013. L'algorithme détecte les régimes suivants :

- Quatre régimes dans la volatilité des prix WTI et des prix du Brent ;
- Huit régimes dans la volatilité des prix américains (4 régimes) et
- Six régimes de volatilité des prix européens agrégés.

La lecture des résultats montre que la période allant de Septembre 2008 à Juin 2009 enregistre les plus forts régimes de volatilité sur les quatre marchés. Celle-ci coïncide avec la crise des subprimes dans le cas des marchés boursiers et la plus forte progression du prix du baril de pétrole dépassant les 140 dollars. Dans le cas du marché de pétrole WTI, la forte turbulence est enregistré jusqu'au début de l'année 2010. Une deuxième période commune à de forte volatilité sur les deux marchés boursiers est détectée au dernier trimestre de l'année 2011. Celle-ci coïncide avec la période de la crise de la dette dans la zone euro. La figure 1 illustre ces périodes de turbulence estimées au moyen du troisième modèle MGARCH (Tableau 5 et Figure 1).

L'estimation des volatilités montre que les prix du pétrole WTI et Brent sont plus volatiles que les prix des marchés boursiers. Les périodes de volatilité communes détectées précédemment sont retrouvées dans les estimations de la volatilité. Les pics d'incertitude sur les prix de pétrole et sur les marchés boursiers sont estimés durant les dernier mois de l'année 2008. Ce résultat soupçonne d'une

part, une co-dépendance entre le prix du pétrole et les marchés américains et européens et d'autre part, un phénomène de contagion en période de crise³⁰.

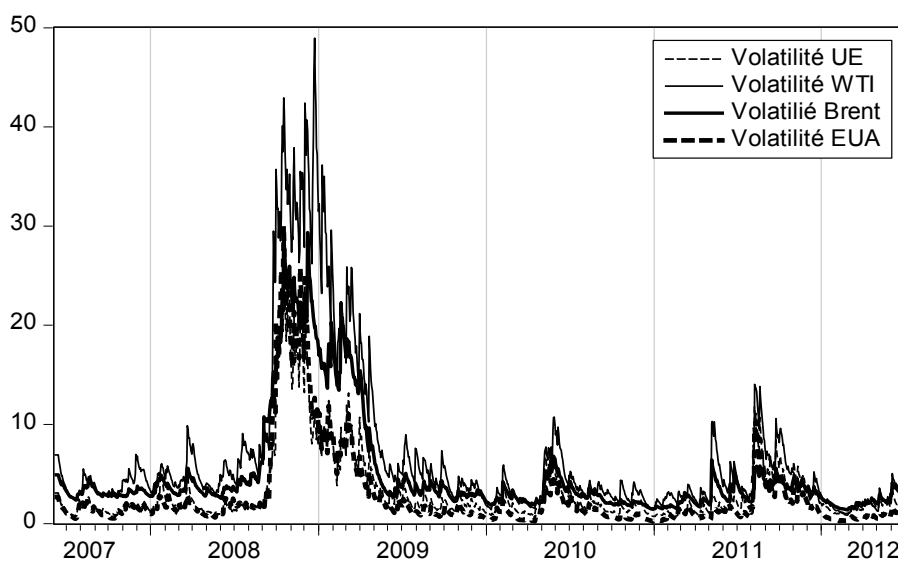
Tableau 4

Quel est le meilleur modèle de volatilité non-linéaire?

Au regard du maximum de la fonction de vraisemblance, les deux modélisations de la variance conditionnelle avec régimes de variance ou ruptures structurelles BEKK-BSV et BEKK-TAV-BSV sont préférables à la modélisation standard BEKK. Le test de rapport de log-vraisemblance LR confirme cette préférence (tableau 5).

Tableau 5

Figure 2. Volatilités estimées



Les volatilités des prix sont estimées par le modèle BEKK-TAV-BSV.

Les régimes de variance sont retrouvés dans les estimations des coefficients ω des variances conditionnelles. Le tableau 6 donne ces estimations pour les deux spécifications BEKK-BSV et BEKK-TAV-BSV. Les estimations montrent la part importante de volatilité des premiers régimes qui coïncident avec la période de la crise financière des subprimes (régime 1 des quatre marchés et régime 1 et 2 du marché américain).

Tableau 6

b. La persistance de la volatilité

Les coefficients de la variance conditionnelle sont significatifs dans les trois spécifications MGARCH. Nos estimations montrent que l'asymétrie de la volatilité mesurée est plus importante sur les marchés américains et le NYMEX comparativement aux marchés européens et au marché du pétrole Brent³¹.

Concernant la question de la persistance, il est empiriquement admis que les marchés financiers y compris les marchés de matière première sont caractérisés par une persistance historique des chocs

³⁰ La contagion en période de crise des subprimes est retrouvée entre le marché américain et les marchés européens dans Bensafta et Semedo (2011).

³¹ L'Asymétrie dans la volatilité du marché est estimée par le coefficient gamma dans l'équation de la variance conditionnelle.

(WEI ET AL, 2010). Celle-ci traduit la mémoire de volatilité des marchés³². Les estimations de la persistance obtenues par les trois modèles sont données dans le tableau 4³³. Les estimations des demi-vies du marché de pétrole WTI obtenues par les trois modèles sont de trois semaines ouvrables. Le modèle BEKK estime la persistance dans le cas du pétrole Brent à 16 jours alors qu'elle est de seulement 10 jours pour les deux modèles BEKK-BSV et BEKK-TAV-BSV. Le modèle BEKK standard surestime également la persistance des chocs sur le marché américain. Le modèle BEKK-TAV-BSV estime cette persistance à deux semaines. Un résultat similaire est obtenu pour le marché européen. La persistance est surestimée par le modèle standard (tableau 6, panel B).

Deux résultats sont à retenir de ces estimations :

Premièrement, le modèle sans ruptures structurelles a tendance à surestimer la persistance des chocs de volatilité. Les résultats obtenus ici pour le cas des marchés du pétrole sont conformes à ceux obtenus précédemment pour les marchés boursiers (LAMOUREUX ET LASTRAPE, 1990). Deuxièmement, les chocs de volatilité sont plus persistants sur le marché de pétrole WTI³⁴ et sur le marché américain comparativement au marché de pétrole Brent (ICE) et le marché européens agrégé.

Il faut rappeler que la mesure de persistance est importante dans la prévision des volatilités, dans la gestion des risques de produits pétroliers et dans la gestion de portefeuille (ELDER ET SERLETIS, 2008). Ce résultat est important car il conduit à la sous-évaluation de la volatilité des produits énergétiques dérivés. .

c. Causalité en variance

Concernant les causalités en variance, le tableau 7 donne les statistiques des tests ACV et les estimations des transmissions des chocs de volatilité entre les quatre marchés. Ces résultats sont les suivants :

Premièrement, les statistiques du test ACV montrent la présence de causalité en variance entre les prix WTI et le marché américain. Il y a également des causalités des prix WTI et des prix américains vers les prix Brent et vers le marché européen. Les statistiques ACV montrent aussi que le modèle BEKK standard ne détecte pas certaines causalités en variance, comme par exemple les causalités des prix WTI et du marché américain vers les prix du Brent (tableau 7, panel A).

Tableau 7

Deuxièmement, la causalité en variance la plus importante est mesurée du marché américain vers le marché européen. Pour les marchés de l'énergie, le modèle standard estime que moins de 1% de la volatilité du marché de pétrole WTI est transmise aux deux marchés boursiers et aucune volatilité n'est transmise par le marché du Brent. Les modèles avec ruptures structurelles estiment le double la transmission du marché du pétrole WTI vers les marchés boursiers. Les modèles BEKK-BSV et BEKK-TAV-BSV estiment la transmission du marché américain vers le marché du pétrole à plus de 5% (modèle BEKK-BSV) et à 6% (modèle BEKK-TAV-BSV). Aucun modèle ne trouve de causalité du marché Brent vers les autres marchés y compris le marché WTI. L'incertitude sur le marché du Brent ne semble pas affectée les autres marchés (tableau 7, panel B).

Enfin, la mesure de la transmission asymétrique de la volatilité (modèle BEKK-TAV-BSV) indique que la part de la transmission asymétrique est plus importante que la part de la transmission globale. En effet, en présence de chocs négatifs, près de 10% de la volatilité du marché américain est transmise

³² La littérature empirique sur la persistance des chocs sur les marchés de produits énergétique n'est pas abondante. Voir par exemple les travaux de Brunetti et Gilbert (2000); Tabak et Cajueiro (2007) et Kang et al (2009).

³³ Les estimations complètes sont disponibles auprès des auteurs.

³⁴ La persistance des chocs de prix du pétrole témoigne de la présence d'une tendance à la hausse de la volatilité. Ce résultat est conforme à celui trouvé par Pindyck (2004).

au marché de pétrole WTI et 6% vers le marché Brent. Il y également de la transmission asymétrique du marché américain vers le marché européen. Plus de 6% des perturbations du marché américain sont transmises au marché européen en présence de mauvaises nouvelles. La transmission est deux fois plus importante que la transmission globale. Les chocs de volatilité liés aux mauvaises informations se transmettent plus que les chocs liés aux bonnes informations.

4. Conclusion

Les modèles VAR linéaire sont fréquemment utilisés pour estimer les transmissions en moyenne entre les variables macroéconomique et financière. Il s'agit souvent de l'application systématique du modèle VAR linéaire alors que celle-ci présente des hypothèses trop restrictives d'homogénéité de la variance ; de telles hypothèses sont difficilement satisfaites sur les longues périodes et/ou lorsque la fréquence des données est importantes. Par ailleurs, dans la classe des modèles VAR non linéaires, la présence de multiples régimes de variance n'est pas prise en compte. Cette omission conduit aux biais de sous-estimation des transmissions du second ordre et d'une surestimation de la persistance.

Dans ce papier, nous avons comparé les estimations des transmissions en moyenne et en variance obtenues entre les marchés de produits énergétiques et les marchés boursiers en considérant trois spécifications VAR non-linéaires : le modèle BEKK, le modèle BEKK avec rupture en variance et le modèle BEKK avec rupture en variance et transmission asymétrique de la volatilité.

Le modèle VAR non linéaire utilisé ici permet la détection de l'impact global des prix du marché américain sur les prix du pétrole, les prix du gaz et les prix européens. Il y a une causalité significative des prix et de la variance du marché américain sur les prix et les variances des prix du pétrole, des prix du gaz et du marché européen agrégé. De plus, l'analyse de l'asymétrie dans la transmission montre que la part de la volatilité transmise dans le cas des chocs négatifs est deux fois plus importante que celle des chocs positifs. Ce résultat est retrouvé dans le cas de la transmission du marché américain vers le marché du pétrole et également dans sa transmission vers le marché européen agrégé. Nos estimations montrent que 12% de l'incertitude du prix du pétrole et 9% de celle du marché européen sont liées à la turbulence du marché américain.

Nos résultats renforcent l'hypothèse de globalité de la place boursière de New York et celle de son impact sur les marchés européen et sur le marché de pétrole WTI. Le caractère exogène du marché américain est de nouveau confirmé. Cette relation entre le marché de pétrole et le marché boursier américain montre la nature complexe des prix du pétrole et des origines de son instabilité. Les incertitudes sur les prix des produits énergétiques constituent un véritable enjeu pour les pays exportateurs et les pays importateurs de ces matières premières. Une estimation adéquate des turbulences sur les marchés de produit énergétique comme le pétrole peuvent être de grande importance dans la construction des politiques macroéconomique de ces pays et notamment des pays mono exportateurs de pétrole. Pour ces derniers, la dépendance vis-à-vis des recettes des produits pétroliers est totale. Les variations non-anticipées dans les prix internationaux de ces produits peuvent avoir des conséquences désastreuses en termes de politique publique, de stabilité économique et sociale. Par ailleurs, l'absence de transmission entre les marchés boursiers et le marché de gaz naturel rend possible les stratégies de diversification de portefeuilles d'investissement.

Enfin, l'analyse VAR non linéaire appliquée au marché de pétrole peut être reconduite dans le cas de la relation du marché américain avec d'autres marchés énergétiques comme celui du charbon et de l'électricité. Elle peut également aborder de nouveaux marchés de matière première comme les métaux, les métaux précieux et les produits agricoles. L'interdépendance des marchés peut également faire l'objet d'analyses ultérieures par le biais de l'étude de la dynamique des corrélations entre les marchés.

Bibliographie

- Adrangi, B., Chatrath, A., Dhanda, K.K., Raffiee, K., 2001. Chaos in oil prices? Evidence from futures markets. *Energy Economics* 23, 405–425.
- Aloui, C., Jammazy, R., Dhakhlaoui, I., 2008. Crude oil market shocks and stock market returns. *Journal of Energy Markets* 3, 69–96.
- Aloui, C., Mabrouk, S., 2010. Value-at-risk estimations of energy commodities via long memory, asymmetry and fat-tailed GARCH models. *Energy Policy* 38, 2326–2339.
- Arouri, M.E.H. (2011). Does crude oil move stock markets in Europe? A sectoral investigation. *Economic Modelling*, 28, 1716-1725.
- Arouri, M.E.H., Nguyen, D.K. (2010). Oil prices, stock markets and portfolio investment: Evidence from sector analysis in Europe over the last decade. *Energy Policy*, 38(8), 4528-4539.
- Baba, Y., Engle, R. F., Kraft, D, and K. Kroner, 1990, Multivariate simultaneous generalized ARCH, Working paper, University of California San Diego.
- Baillie, R.T., Myers, R., 1991. Bivariate GARCH estimation of the optimal commodity futures hedge. *J. Appl. Econ.* 6, 109–124.
- Bauwens, L., Laurent, S., Rombouts, J., 2003, Multivariate GARCH Models: A Survey. *Journal of Applied Econometrics* 21 (1), 79–109
- Bensafta, M. K., 2010, Non-Stationary Variance and Volatility Causality. *Economics Bulletin* 30 (4), 2920-2935
- Bensafta, M., K., G. Semedo, 2009. De la Transmission de la Volatilité à la Contagion entre Marchés Boursiers : L'éclairage d'un modèle Var non linéaire avec Bris Structurels en Variance. *Actualité Economique*, vol 85 (1), 12-76.
- Bensafta, M. K., Semedo, G., 2011, Chocs, Chocs de Volatilité et Contagion entre les Marchés Boursiers : Application d'un modèle ICSS-MGARCH. *Revue Economique*, Vol 62 n°2, 256-277.
- Berndt, E. K., Hall, B. H., Hal, R. E., Hausman, J. A., 1974. Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models, *Annals of Economic and Social Measurement* 3-4, 653-665
- Bollerslev, T., 1986. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *J. Econ.* 31, 307–327.
- Bollerslev, T., Wooldridge, J., 1992, Quasi Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time-varying Covariances, *Economic Reviews* 11, 143-17
- Borenstein, S., Cameron, C.A., Gilbert, R., 1997. Do gasoline prices respond asymmetrically to crude oil price changes? *Q. J. Econ.* 112, 305–339.
- Brunetti, C., Gilbert, C. L., 2000. Bivariate FIGARCH and fractional cointegration, *Journal of Empirical Finance*, Elsevier, vol. 7(5), 509-530.
- Chang, E. C., Pinegar, J. M., Ravichandran, R., 1993, International Evidence on the Robustness of the Day-of-the-Week Effect, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* Vol. 28, No. 4 , pp. 497-513.
- Chang, C.-L., McAleer, M., Tansuchat, R., 2009. Modeling Conditional Correlations for Risk Diversification in Crude Oil Markets. *Journal of Energy Markets* Volume 4 (2), 29-51.
- Chang, C.-L., McAleer, M., Tansuchat, R., 2010. Analyzing and forecasting volatility spillovers, asymmetries and hedging in major oil markets. *Energy Economics*. 32, 1445–1455.
- Chang, C.-L., McAleer, M., Tansuchat, R., 2011. Crude oil hedging strategies using dynamic multivariate GARCH. *Energy Economics*. 33, 912–923.

- Chen, S.S. (2009). Do higher oil prices push the stock market into bear territory? *Energy Economics*, 32(2), 490-495.
- Cong, R. G., Wei, Y. M., Jiao, J. L., and Y. Fan (2008), "Relationships between oil price shocks and sock market: an empirical analysis from China," *Energy Policy* , 36, 3544-3553.
- Dornbusch, R., Park, Y.C. and Claessens, S. (2000), "Contagion: Understanding How It Spreads", *The World Bank Research Observer* , 15(2), 177 -197.
- Elder, J., Serletis, A., 2009. Oil price uncertainty in Canada. *Energy Economics* 31, 852–856.
- Engle, R.F., 1982. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*. 50, 987–1007.
- Engle, R.F., 2002. Dynamic conditional correlation: a simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business Economics and Statistics*. 20, 339–350.
- Engle, R.F., Kroner, K.F., 1995. Multivariate simultaneous generalized ARCH. *Econometric Theory* 11, 122–150.
- Ewing, B.T., Malik, F., Ozfidan, O., 2002. Volatility transmission in the oil and natural gas markets. *Energy Economics* 24, 525–538.
- Fan, Y., Zhang, Y.J., Tsaic, H.T., Wei, Y.M., 2008. Estimating 'value at risk' of crude oil price and its spillover effect using the GED-GARCH approach. *Energy Economics*. 30, 3156–3171.
- Ferson, W., C. Harvey (1995). Predictability and time-varying risk in world stock markets. *Research in Finance*, 13: 25-88.
- Filis, G. (2010). Macro economy, stock market and oil prices: Do meaningful relationships exist among their cyclical fluctuations? *Energy Economics*, 32(4), 877-886.
- Forbes, K., Rigobon, R., 2002, No contagion, only interdependence: measuring stock market co-movements. *Journal of Finance*, 57 (5), 2223-2261
- Giot, P., Laurent, S., 2003. Market risk in commodity markets: a VaR approach. *Energy Economics*. 25, 435–457.
- Goodhart, C., 1988. The international transmission o asset price volatility. In: Eisner, R., Gramely, L. (Eds.), *Financial Market Volatility*. Federal Reserve Bank of Kansas City.
- Huang, R.D., Masulis, R.W., Stoll, H.R., 1996. Energy shocks and financial markets. *Journal of Futures Markets* 16, 39–56.
- Inclan, C., Tiao, G. C., 1994, Use of cumulative sums of squares for retrospective detectionof changes of variance. *Journal of the American Statistical Association*, 89, 913-923.
- Jones, C.M., Kaul, G., 1996. Oil and the Stock Markets. *Journal of Finance*, vol. 51. American Finance Association, pp. 463–491.
- Kang, S.H., Kang, S.M., Yoon, S.M., 2009. Forecasting volatility of crude oil markets. *Energy Economics*. 31, 119–125.
- Kilian, Lutz, 2007. The Economic Effects of Energy Price Shocks, CEPR Discussion Papers 6559.
- King, M.A., Wadhvani, S., 1990. Transmission of volatility between stock markets. *Rev. Financ. Stud.* 3, 5–33.
- King, M.A., Sentana, E., Wadhvani, S., 1994. Volatility and links between national stock markets. *Econometrica* 62, 901–933.
- Kodres L., Pritsker M., 2002, A Rational Expectations Model of Financial Contagion , *Journal of Finance* vol. 57 N2, 768-99.

- Lamoureux, C. G., Lastrapes, W. D., 1990, Persistence in Variance, Structural Change, and the GARCH Model, *Journal of Business & Economic Statistics*, 8 (2) : 225-234.
- Lanza, A., Manera, M., McAleer, M., 2006. Modeling dynamic conditional correlations in WTI oil forward and futures returns. *Finance Research Letters*. 3, 114–132.
- Lütkepohl, H., 2005, New Introduction to Multiple Time Series Analysis. Berlin, Springer.
- Malik, F., 2003, Sudden changes in variance and volatility persistence in foreign exchange markets. *Journal of Multinational Financial Management* 13, 217–230.
- Miller, J.I. Ratti, R.A. (2009). Crude oil and stock markets: Stability, instability, and bubbles. *Energy Economics*, 31(4), 559-568.
- Mohammadi, H., Su, L., 2010. International evidence on crude oil price dynamics: applications of ARIMA-GARCH models. *Energy Economics*. 32, 1001–1008.
- Morana, C., 2001. A semiparametric approach to short-term oil price forecasting. *Energy Economics* 23, 325–338.
- Narayan, P.K., Narayan, S., 2007. Modelling oil price volatility. *Energy Policy* 35, 6549–6553.
- Park, J. Ratti, R.A. (2008). Oil prices and stock markets in the U.S. and 13 European countries. *Energy Economics*, 30, 2587-2608.
- Pindyck, R.S., 2004. Volatility and commodity price dynamics. *Journal of Futures Market* 24, 1029–1047.
- Sadorsky, P., 1999. Oil Price Shocks and Stock Market Activity, *Energy Economics*, vol. 2, 449-469.
- Sadorsky, P., 2006. Modeling and forecasting petroleum futures volatility. *Energy Economics* 28 (4), 467–488.
- Sadorsky, P., 2012. Correlations and volatility spillovers between oil prices and the stock prices of clean energy and technology companies. *Energy Economics* 34, 248–255.
- Sanso, A., Arago, V., Carrion-i-Silvestre, J. L., 2004, Testing for changes in the unconditional variance of financial time series. *Revista de Economia Financiera* 4, 32–53
- Tabak, B.M., Cajueiro, D.O., 2007. Are the crude oil markets becoming weakly efficient over time? A test for time-varying long-range dependence in prices and volatility. *Energy Economics* 29, 28–36.
- Wang Y., Wu, C., 2012. Forecasting energy market volatility using GARCH models: Can multivariate models beat univariate models? *Energy Economics*, Volume 34, Issue 6, 2167–2181.
- Wei, Y., Wang, Y., Huang, D., 2010. Forecasting crude oil market volatility: further evidence using GARCH-class models. *Energy Economics*. 32, 1447–1484.

Annexes I : tableaux

Tableau 1 : analyse descriptive des données

Rendement	Moy	Max	Min	Std. Dev.	Asy	Kurtosis	Jarque-Bera	ADF
MSCI-USA	-0.013	11.042	-9.514	1.652	-0.250	9.817	2540.147***	-60.183***
MSCI-EU	-0.047	10.699	-10.178	1.908	-0.008	7.459	1081.270***	-26.574***
WTI	0.018	16.414	-12.827	2.699	0.081	7.906	1310.198***	-36.686***
Brent	0.025	18.130	-16.832	2.377	0.019	9.769	2491.792***	-36.501***

*** Significatif à 1%.

Tableau 2. Transmission en moyenne (modèle BEKK-TAV-BSV)

Panel A : estimation des effets de transmission en moyenne

		WTI	Brent	EUA	Europe
WTI	(-1)	0.08%	34.40% ***	-3.26%	1.87%
	(-2)	-5.62%	14.00%	-1.85%	3.86%
	(-3)	2.66%	1.26%	-4.31%	-0.45%
	(-4)	7.72% *	5.67% ***	2.55%	5.65% **
	(-5)	-3.13%	-2.31%	-0.11%	2.49%
Brent	(-1)	3.21%	-23.73%	2.51%	-2.27%
	(-2)	4.88%	-11.36%	3.41%	-1.00%
	(-3)	-6.36%	-1.76%	-0.57%	-2.10%
	(-4)	-4.94%	-2.68%	0.49%	-0.35%
	(-5)	6.89%	4.89%	2.27%	1.31%
EUA	(-1)	21.55% ***	21.00% ***	-10.84%	50.07% ***
	(-2)	5.81%	6.91%	-4.00%	19.90%
	(-3)	-3.28%	-3.19%	-4.29%	6.21%
	(-4)	7.54%	6.80%	3.06%	7.58%
	(-5)	3.85%	8.53%	0.17%	8.08%
Europe	(-1)	-12.45% **	-17.70% ***	5.14%	-31.02%
	(-2)	2.02%	0.43%	1.35%	-14.26%
	(-3)	-2.20%	1.78%	3.55%	-7.97%
	(-4)	-1.50%	-2.01%	-1.49%	-5.46%
	(-5)	-2.79%	-2.58%	-2.04%	-5.49% ***
Constante		0.10%	5.37%	6.21%	-0.59%
Panel D : Effet fermeture et effet jours de la semaine					
Marché fermé		1.192 ****	0.368	-0.104	0.076
Effet Lundi		0.035	0.006	-0.044	-0.046

(..) Retard. ***, **, * Significatif à 1, 5 et 10%.

A Causalité du prix en ligne vers le pris en colonne.

Tableau 3 : Test de d'Absence de transmission en moyenne ATM et TMLT

	ATM								TMLT				
	VAR	BEKK		BEKK-BSV		BEKK-TAV-BSV			VAR	BEKK	BEKK-BSV	BEKK-TAV-BSV	
<i>WTI → Brent</i>	149.49	***	118.71	***	140.53	***	38.77	***	<i>WTI → Brent</i>	57.51%	44.23%	42.62%	38.06%
<i>WTI → US</i>	13.23	**	7.74		5.66		6.64		<i>WTI → US</i>	2.78%	-2.21%	-2.08%	-3.13%
<i>WTI → UE</i>	16.24	***	8.17		7.85		6.34		<i>WTI → UE</i>	10.29%	6.50%	6.08%	5.49%
<i>Brent → WTI</i>	48.40	***	9.26	*	10.14	*	5.10		<i>Brent → WTI</i>	-23.38%	3.28%	1.95%	4.57%
<i>Brent → US</i>	15.66	***	3.25		3.93		1.88		<i>Brent → US</i>	-1.60%	5.02%	5.13%	5.21%
<i>Brent → UE</i>	5.70		1.34		1.73		2.22		<i>Brent → UE</i>	-7.63%	0.10%	0.03%	1.20%
<i>US → WTI</i>	32.29	***	12.27	**	10.82	*	9.21	*	<i>US → WTI</i>	19.16%	17.35%	16.91%	24.60%
<i>US → Brent</i>	54.12	***	15.14	***	15.02	**	6.51		<i>US → Brent</i>	30.73%	20.60%	20.78%	28.69%
<i>US → UE</i>	209.93	***	97.61	***	105.33	***	73.71	***	<i>US → UE</i>	45.87%	46.07%	46.78%	51.41%
<i>UE → WTI</i>	20.56	***	6.83		7.20		7.53	*	<i>UE → WTI</i>	-31.17%	-11.29%	-9.83%	-10.00%
<i>UE → Brent</i>	26.05	***	14.59	**	16.42	***	3.45		<i>UE → Brent</i>	-28.91%	-13.68%	-12.29%	-12.25%
<i>UE → US</i>	10.44	*	4.19		4.38		5.39		<i>UE → US</i>	-0.73%	3.72%	3.11%	3.24%

***, **, * Significatif à 1, 5 et 10%.

Tableau 4. Régimes de variance

EUA				Europe			
Régime	Début	Fin	Variance	Régime	Début	Fin	Variance
1	04/06/2007	12/09/2008	1.253	1	04/06/2007	03/09/2008	1.394
2	15/09/2008	02/12/2008	4.656 ^A	2	04/09/2008	08/12/2008	4.488 ^A
3	03/12/2008	01/06/2009	2.262 ^A	3	09/12/2008	15/07/2009	2.237 ^A
4	02/06/2009	26/04/2010	0.993	4	16/07/2009	29/07/2011	1.433
5	27/04/2010	03/09/2010	1.509	5	01/08/2011	30/11/2011	2.621 ^B
6	06/09/2010	01/08/2011	0.793	6	01/12/2011	01/06/2012	1.379
7	02/08/2011	30/11/2011	2.173 ^B				
8	01/12/2011	01/06/2012	0.829 ^B				
	04/06/2007	01/06/2012	1.652^C		04/06/2007	01/06/2012	1.908^C
WTI				BRENT			
Régime	Début	Fin	Variance	Régime	Début	Fin	Variance
1	04/06/2007	20/08/2009	3.249	1	04/06/2007	20/08/2008	1.853663
2	21/08/2009	11/01/2010	7.851 ^A	2	21/08/2008	02/04/2009	4.636211
3	12/01/2010	10/11/2011	2.259	3	03/04/2009	26/08/2010	2.13546 ^A
4	11/11/2011	01/06/2012	3.704	4	27/08/2010	01/06/2012	1.548966
	04/06/2007	01/06/2012	2.699^C		04/06/2007	01/06/2012	1.908^C

Régimes de variance obtenue par l'algorithme ICSS-H.

Légendes. Variance : est la mesure de la variance non-conditionnelle enregistrée durant le régime. ^A Crise des Subprimes. ^B Crise de la dette de la zone euro. ^C La variance sur l'ensemble de la période.

Tableau 5 : Maximum de Vraisemblance, Tests LR et tests de diagnostiques.

	BEKK	BEKK-BSV	BEKK-TAV-BSV
MV	-6655.74	-6641.87	-6614.23
LR1		27.74 ***	
LR2			83.02 ***
LR3			55.28 ***
Tests de diagnostiques des résidus			
Test 1			
Test 2			

LR1 : teste LR du modèle BEKK-BSV vs BEKK. Sous l'hypothèse nulle, la statistique du test suit un $\chi^2_{(18)}$. LR2 : teste LR du modèle BEKK-TAV-BSV vs BEKK. Sous l'hypothèse nulle, la statistique du test suit un $\chi^2_{(30)}$. LR3 : test LR du modèle BEKK-TAV-BSV vs BEKK-BSV. Sous l'hypothèse nulle, la statistique du test suit un $\chi^2_{(12)}$.

Tableau 6. Estimations de la variance conditionnelle

Panel A: Régimes de volatilité	BEKK standard				BEKK-BSV				BEKK-TAV-BSV			
	WTI	Brent	EUA	UE	WTI	Brent	EUA	UE	WTI	Brent	EUA	UE
Régime 1	-	-	-	-	2.076 ***	2.191 ***	0.275 ***	1.070 ***	3.634 ***	2.652 ***	0.100	0.572
Régime 2	-	-	-	-	1.521	10.517 ***	10.112 *	2.290	1.619	10.463 ***	8.657 ***	0.566
Régime 3	-	-	-	-	1.823 *	1.995	0.132	0.863	1.905 *	1.777 *	0.063	0.562
Régime 4	-	-	-	-	0.723	1.822	0.162	0.864	0.821 ***	1.628 **	0.045	0.658
Régime 5	-	-	-	-			0.445	2.129			0.447	1.472
Régime 6	-	-	-	-			0.174	1.144			0.056	0.897
Régime 7	-	-	-	-			1.277				0.757	
Panel B: Persistance et Demi-vie												
Alpha (α_i)	0.048 ***	0.016 ***	0.003 ***	0.001 ***	0.022 ***	0.024 ***	0.000 *	0.001 *	0.020 **	0.000 *	0.005 **	0.001 *
Gama (γ_i)	0.062 ***	0.018 ***	0.128 ***	0.090 ***	0.085 ***	0.028 ***	0.126 ***	0.080 ***	0.082 ***	0.054 ***	0.103 ***	0.061 ***
Beta (β_i)	0.877 ***	0.933 ***	0.893 ***	0.872 ***	0.895 ***	0.897 ***	0.873 ***	0.834 ***	0.896 ***	0.908 ***	0.886 ***	0.852 ***
Persistance (φ_i)	0.955	0.958	0.961	0.918	0.960	0.935	0.937	0.874	0.957	0.935	0.942	0.883
Half-life (HL_i)	15.199	16.333	17.221	8.087	16.941	10.362	10.610	5.168	15.866	10.376	11.615	5.589
MRV												

***, **, * Significatif à 1, 5 et 10%. MRV Mean Reverting Variance est $E(h_t) = \frac{w}{1-\varphi}$

Tableau 7 : test de causalité en variance, causalité en variance et causalité asymétrique en variance.

	Panel A : test d'Absence de Causalité en variance ACV ^a			Panel B : Transmission en variance TV			ACV	TAV ^b	
	BEKK	BEKK-BSV	BEKK-TAV-BSV	BEKK	BEKK-BSV	BEKK-TAV-BSV			
WTI → Brent	0.427	1.176	0.452	NS	NS	NS	WTI → Brent	3.539 *	1.46%
WTI → US	10.705 ***	10.838 ***	7.889 ***	0,83%	1,71%	1.78%	WTI → US	3.501 *	2.47%
WTI → UE	4.116 *	4.803 *	3.209 *	1,21%	1,49%	1.41%	WTI → UE	3.576 *	1.46%
Brent → WTI	0.303	1.226	1.558	NS	NS	NS	Brent → WTI	0.071	NS
Brent → US	0.179	0.395	0.177	NS	NS	NS	Brent → US	0.118	NS
Brent → UE	0.028	0.049	0.030	NS	NS	NS	Brent → UE	0.186	NS
US → WTI	3.238 *	9.783 ***	6.233 **	2,78%	5,24%	6.18%	US → WTI	4.736 *	9.31%
US → Brent	1.738	5.368 *	5.576 *	NS	4,32%	4.15%	US → Brent	3.866 *	6.07%
US → UE	5.658 *	6.579 **	11.221 ***	2,22%	2,21%	2.78%	US → UE	3.123 *	6.50%
UE → WTI	0.094	0.201	0.069	NS	NS	NS	UE → WTI	0.482	NS
UE → Brent	0.193	0.044	0.868	NS	NS	NS	UE → Brent	3.111 *	2.82%
UE → US	0.237	0.386	0.755	NS	NS	NS	UE → US	1.732	NS

^a Sous l'hypothèse nulle d'absence de causalité en variance, la statistique du test suit un $\chi^2_{(2)}$. ^b Causalité asymétrique en variance. Sous l'hypothèse nulle, la statistique du test suit un $\chi^2_{(1)}$

Annexes II : modèle économétrique

Dans un cadre multivarié, la transmission en moyenne est mesurée par les coefficients VAR des équations de la moyenne conditionnelle. Le modèle VAR est :

$$\begin{pmatrix} r_{1t} \\ \vdots \\ r_{Mt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_M \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{n_1} \begin{pmatrix} \Phi_{11}^k L^k & \dots & \Phi_{1M}^k L^k \\ \vdots & \Phi_{ij}^k L^k & \vdots \\ \Phi_{M1}^k L^k & \dots & \Phi_{MM}^k L^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{1t} \\ \vdots \\ r_{Mt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ \vdots \\ u_{Mt} \end{pmatrix} \quad \text{A 1}$$

Où $r_t = (r_{1t} \dots r_{Mt})^{tr}$ est un vecteur de rendements logarithmiques des indices MSCI, μ un vecteur de constante et $u_t = (u_{1t} \dots u_{Mt})^{tr}$ un vecteur de résidus canoniques. Les equations de la moyenne sont augmentées avec un regresseur exogène comme des variables macroéconomiques et/ou des variables monétaires. Cette écriture générale est :

$$\Phi(L)(r_t - \mu) = C(L)\mathcal{G}(X_t) + u_t \quad \text{A 2}$$

Où $\Phi(L)$ est une fonction retard dans un processus VAR(n_1) et $\mathcal{G}(X_t)$ un vecteur de variables exogènes. $C(L)$ est une matrice de coefficient des variables exogènes. La transmission en moyenne est décrite par les coefficients Φ_{ij}^k du processus VAR. dans notre cas, X_t est un vecteur de variables des effets de jour de la semaine :

$$X_t = \{D_{it}\} \quad \text{A 3}$$

Soit u_t un vecteur d'innovation VAR non autocorrélé et :

$$u_t = H_t^{-1/2} \varepsilon_t$$

Où ε_t un vecteur de N-dimension d'éléments bruits blancs, tel que $\varepsilon_t \sim i. i. d(0, I_t)$ et H_t une matrice des variances-covariances conditionnelles définie par :

$$H_t = \begin{bmatrix} h_{11t} & \dots & h_{1Mt} \\ \vdots & h_{ijt} & \vdots \\ h_{1Mt} & \dots & h_{MMt} \end{bmatrix} \quad \text{A 4}$$

Où h_{iit} les variances conditionnelles des M marchés ($i = \overline{1, M}$) et h_{ijt} les covariances conditionnelles ($i = \overline{1, M}, j = \overline{1, M}$ and $i \neq j$). La matrice H_t du modèle BEKK-A-BSV est :

$$\begin{aligned} H_t = & \underbrace{C_B' C_B + \sum_{i=1}^p A_i' u_{t-i} u_{t-i}' A_i + \sum_{i=1}^q B_i' H_{t-i} B_i + \sum_{i=1}^p G_i' u_{t-i} u_{t-i}' * D_{Mt-i} D_{Mt-i}' G_i}_{\text{Standard BEKK – diagonal asymmetric}} \\ & + \underbrace{\sum_{i=1}^p \mathbb{T}_i' u_{t-i} u_{t-i}' \mathbb{T}_i + \sum_{i=1}^q \mathbb{Z}_i' H_{t-i} \mathbb{Z}_i}_{\text{transmission de volatilité}} + \underbrace{\sum_{i=1}^5 (\delta_i)^{tr} D_i \delta_i}_{\text{Effets jours de la semaine}} \\ & + \underbrace{\sum_{i=1}^p \mathbb{T} A_i' u_{t-i} u_{t-i}' * D_{Mt-i} D_{Mt-i}' \mathbb{T} A_i}_{\text{transmission asymétrique de volatilité}} \end{aligned} \quad \text{A 5}$$

Où p et q sont les ordres du processus GARCH. La matrice $(C_B)^{tr}(C_B)$ rend compte des ruptures structurelles en variance. Chaque élément de la diagonal de C_B est :

$$\{C_{Bjj}\} = \omega_{0j} + \sum_{i=1}^{NR_j} \omega_{ji} S_{jt}^i \quad \text{A 6}$$

S_{jt}^i est une variable indicatrice du régime de variance "i" et NR_j le nombre de régime du marché "j". Les régimes sont obtenus par l'algorithme ICSS-heteroscedastique. Pour les détails, voir INCLAN ET TIAO (1993), SANZO ET AL, (2004), MALIK (2003), BENSAPTA (2010) ET BENSAPTA ET SEMEDO (2011).

La matrice C_B est écrite comme suit :

$$C_B = \begin{bmatrix} \omega_{01} + \sum_{j=1}^{NR_1} \omega_{1,j} S_{1,t}^j & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{M-1} & \cdots & \omega_{0M} + \sum_{j=1}^{NR_M} \omega_{M,j} S_{M,t}^j \end{bmatrix} \quad \text{A 7}$$

Les $M(M-1)/2$ éléments ω_i dans C_B assurent que $(C_B)'(C_B)$ soit définie semi-positive. A_i, B_i et G_i sont les matrices coefficients des équations des variances-covariances conditionnelles :

$$A_i = \begin{bmatrix} \alpha_{1i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{Mi} \end{bmatrix}; B_i = \begin{bmatrix} \beta_{1i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta_{Mi} \end{bmatrix}; G_i = \begin{bmatrix} \gamma_{1i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \gamma_{Mi} \end{bmatrix};$$

$$A_i^{tr} u_{t-i} u_{t-i}^{tr} A_i = \begin{bmatrix} \alpha_{1i}^2 u_{1t-i}^2 & \cdots & \alpha_{1i} \alpha_{Mi} u_{1t-i} u_{Mt-i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1i} \alpha_{Mi} u_{1t-i} u_{Mt-i} & \cdots & \alpha_{Mi}^2 u_{Mt-i}^2 \end{bmatrix} \quad \text{A 8}$$

$$B_i^{tr} H_{t-i} B_i = \begin{bmatrix} \beta_{1i}^2 h_{11t-i} & \cdots & \beta_{1i} \beta_{Mi} h_{1Mt-i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{1i} \beta_{Mi} h_{1Mt-i} & \cdots & \beta_{Mi}^2 h_{22t-i} \end{bmatrix} \quad \text{A 9}$$

$$G_i^{tr} u_{t-i} u_{t-i}^{tr} * D_{Mt-i} D_{Mt-i}^{tr} G_i = \begin{bmatrix} \alpha_{1i}^2 u_{1t-i}^2 D_{1t-i}^2 & \cdots & \alpha_{1i} \alpha_{Mi} u_{1t-i} u_{Mt-i} D_{1t-i} D_{Mt-i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1i} \alpha_{Mi} u_{1t-i} u_{Mt-i} D_{1t-i} D_{Mt-i} & \cdots & \alpha_{Mi}^2 u_{Mt-i}^2 D_{Mt-i}^2 \end{bmatrix} \quad \text{A 10}$$

u_t est un vecteur des innovations. D_{Mt-i} un vecteur de dimension M de variables dummy (d_{it}) tel que:

$$(d_{i,t}) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_{it} < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

* est le produit élément par élément.

\mathbb{T}_i ; \mathbb{TA}_i et \mathbb{Z}_i sont des matrices de coefficients de transmission en variance :

$$\mathbb{T}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & tcv_{M,1}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ tcv_{1,M}^i & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{TA}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & tcv_{M,1}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ tcv_{1,M}^i & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{Z}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & tv_{M,1}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ tv_{1,M}^i & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

\mathbb{T}_i est la matrice des coefficients de transmission des chocs de volatilité (tcv^i), \mathbb{TA}_i est la matrice des coefficients de transmission asymétrique des chocs de volatilité (tcv^i) et \mathbb{Z}_i la matrice des coefficients de transmission de volatilité (tv^i) :

$$\mathbb{T}_i' u_{t-i} u_{t-i}' \mathbb{T}_i = \begin{bmatrix} \left(\sum_{j=2}^M (tcv_{j,1}^i) u_{j,t-i} \right)^2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\sum_{j=2}^M (tcv_{j,1}^i) u_{j,t-i} \right) \left(\sum_{j=1}^{M-1} (tcv_{j,M}^i) u_{j,t-i} \right) & \cdots & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{A 11}$$

$$k; \mathbb{TA}_i' u_{t-i} u_{t-i}' \mathbb{TA}_i = \begin{bmatrix} \left(\sum_{j=2}^M (tacv_{j,1}^i) u_{j,t-i} D_{j,t-i} \right)^2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\sum_{j=2}^M (tacv_{j,1}^i) u_{j,t-i} D_{j,t-i} \right) \left(\sum_{j=1}^{M-1} (tacv_{j,M}^i) u_{j,t-i} D_{j,t-i} \right) & \cdots & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{A 12}$$

$$\mathbb{Z}'_i H_{t-i} \mathbb{Z}_i = \begin{bmatrix} \sum_{j=2}^M (tv_{j,1}^i)^2 h_{jj,t-i} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \sum_{j=1}^{M-1} (tv_{j,M}^i)^2 h_{jj,t-i} \end{bmatrix} \quad \text{A 13}$$

La causalité en variance est mesurée par la somme $\sum_{i=1}^p (tcv^i)^2 + \sum_{i=1}^q (tv^i)^2$. La transmission asymétrique est mesurée par la somme $\sum_{i=1}^p (tcv^i)^2 + (tacv^i)^2 + \sum_{i=1}^q (tv^i)^2$. C'est également une mesure de persistance en transmission en variance. La matrice H_t contient le regressueur $\sum_{i=1}^5 (\delta_i)^{tr} D_i \delta_i$ pour permettre des effets « *day-of-the-week* » et des effets « *Holiday* ».

D_i est une matrice diagonal $M \times M$ dont les éléments $\{D_{jt}\} = D_{it}$ sont :

$$D_{it} = \{D_{1t}; D_{2t}; D_{3t}; D_{4t}; D_{5t}\} \quad \text{A 14}$$

$$\begin{cases} D_{1t} = 1 \text{ pour lundi, } 0 \text{ sinon} \\ D_{2t} = 1 \text{ pour mardi, } 0 \text{ sinon} \\ D_{3t} = 1 \text{ pour mercredi, } 0 \text{ sinon} \\ D_{4t} = 1 \text{ pour vendredi, } 0 \text{ sinon} \\ D_{5t} = 1 \text{ pour jours fériés, } 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

La matrice des coefficients δ_i , la matrice des données D_i et le regressueur $(\delta_i)^{tr} D_i \delta_i$ sont:

$$\delta_i = \begin{bmatrix} \delta_{1,i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_{M,i} \end{bmatrix}, D_i = \begin{bmatrix} D_{it} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & D_{it} \end{bmatrix}, (\delta_i)^{tr} D_i \delta_i = \begin{bmatrix} \delta_{1,i}^2 D_{it} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_{M,i}^2 D_{it} \end{bmatrix} \quad \text{A 15}$$

Annexe III : Tests d'absence de causalité

Test d'absence de causalité en moyenne ACM

La causalité en moyenne du marché « i » vers le marché « j » est mesurée par les coefficients $\Phi_{ij}^1 \dots \Phi_{ij}^{n1}$ du VAR. l'hypothèse nulle d'absence de causalité en moyenne concerne la nullité de tous les coefficients Φ_{ij}^k . Ceci est équivalent à un test de Non Causalité au sens de Granger :

Hypothèse nulle d'ACM de i vers j $H_{0,i \rightarrow j}^{ACM}$

$$\begin{cases} H_{0,i \rightarrow j}^{ACM}: \Phi_{ij}^1 = \Phi_{ij}^2 = \dots = \Phi_{ij}^{n1} = 0 \\ H_{1,i \rightarrow j}^{ACM}: \text{non } H_{0,i \rightarrow j}^{ACM} \end{cases} \quad \text{A 16}$$

Sous $H_{0,i \rightarrow j}^{ACM}$, la statistique du test suit un Fisher $\mathcal{F}(n_1, N - 2n_1 - 1)$. (See Lütkepohl, 2005, p103).

Test d'absence de causalité en Variance ACV

La causalité en variance est liée aux coefficients (tcv_{ij}^k) , $(tacv_{ij}^k)$ et (tv_{ij}^k) . Il n'y a pas de causalité en en variance du marché « i » vers le marché « j » lorsque les coefficients (tcv_{ij}^k) , $(tacv_{ij}^k)$ et (tv_{ij}^k) ne sont pas significativement différents de zéro. ACV est un test de Wald de *Non Causalité en variance* :

Hypothèse nulle d'ACV de i vers j $H_{0,i \rightarrow j}^{ACV}$

$$\begin{cases} H_{0,i \rightarrow j}^{ACV}: (tcv_{ij}^1)^2 + \dots + (tcv_{ij}^p)^2 + (tacv_{ij}^1)^2 + \dots + (tacv_{ij}^p)^2 + (tv_{ij}^1)^2 + \dots + (tv_{ij}^q)^2 = 0 \\ H_{1,i \rightarrow j}^{ACV}: \text{non } H_{0,i \rightarrow j}^{ACV} \end{cases} \quad \text{A 17}$$

Sous $H_{0,i \rightarrow j}^{ACV}$, la statistique de Wald suit un $\chi^2(p + q)$.